Mathematiksammlung

Diese Sammlung soll den Schülern helfen, schon mal gelernte Inhalte aus der Mathematik zu wiederholen. In den meisten Fällen stehen die Bücher der früheren Jahrgänge ja nicht mehr zur Verfügung.
Alles was in dieser Sammlung steht, sollte ein Schüler der Wilhelm-Raabe-Realschule können. Dabei muss man nicht alles auswendig wissen, sondern man sollte es verstanden haben und richtig anwenden können.
Die Sammlung soll weiterhin verbessert und überarbeitet werden.

Inhaltsverzeichnis

Jahrgang 5/6	Seite
Grundrechenarten, Maßeinheiten	2
Zahlen, Teilbarkeitsregeln	3
Bruchrechnung	4
Rechnen mit Dezimalzahlen	5
Winkel, Winkelsummen	6
Flächenberechnung, Körperberechnung	7
Term, Potenz	7
Jahrgang 7/8	
Zahlen, Rechnen mit rationalen Zahlen	8
Multiplizieren von Klammern	8
Terme und Gleichungen, Gleichungen lösen	9
Linien im Dreieck	10
Flächenberechnung, Körperberechnung	11
Zuordnungen	12
Lineare Funktionen	12
Prozentrechnung	13
Zinsrechnung	14
Jahrgang 9/10	
Zahlen, Flächenberechnung, Körperberechnung	15
Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	16
Quadratische Gleichungen	17
Quadratische Funktionen	18
Trigonometrie	19
Strahlensätze	20
Potenzen, Wurzeln	21
Exponentielles Wachstum	22
Zinseszinsrechnung	22
Lineare Gleichungssysteme	23
Daten und Zufall	
Tabellen und Diagramme	24
Begriffe	25
Boxplot	26
Streudiagramm	27
Häufigkeiten	28

Grundrechenarten

Addition +	1. Summand	plus	2. Summand	=	Summe
	15	+	12	=	27
Subtraktion –	Minuend	minus	Subtrahend	=	Differenz
	34	–	15	=	19
Multiplikation •	1. Faktor	mal	2. Faktor	=	Produkt
	5	•	12	=	60
Division :	Dividend	geteilt durch	Divisor	=	Quotient
	56	:	7	=	8

Maßeinheiten

Längenmaße	1 mm 10 mm = 1 cm 10 cm = 1 dm 10 dm = 1 m 1000 m = 1 km	
Flächenmaße *Umwandlungszahl ist* 100	1 mm^2 100 mm^2 = 1 cm^2 100 cm^2 = 1 dm^2 100 dm^2 = 1 m^2 100 m^2 = 1 a (Ar) 100 a = 1 ha (Hektar) 100 ha = 1 km^2	
Raummaße *Umwandlungszahl ist* 1000	1 mm^3 1000 mm^3 = 1cm^3 1000 cm^3 = 1 dm^3 = 1 Liter 1000 dm^3 = 1m^3	
Gewichte	1 mg 1000 mg =1g 1000 g = 1 kg 1000 kg = 1 t	500 g = 1 Pfund 50 kg = 1 Zentner
Zeiteinheiten	1 s 60 s = 1 min 60 min = 1 h 24 h = 1 d	

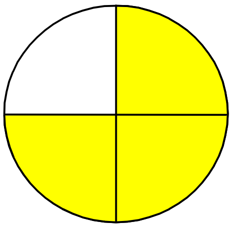
Zahlen

Natürliche Zahlen (N)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …
Gerade Zahlen (durch 2 teilbar)	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …
Ungerade Zahlen	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, …
Primzahlen bis 101 (nur durch 1 und durch sich selbst teilbar)	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101
Quadratzahlen bis 25^2 ($1^2 = 1 \cdot 1 = \underline{1}$, $2^2 = 2 \cdot 2 = \underline{4}$, $3^2 = 3 \cdot 3 = \underline{9}$,….)	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625

Teilbarkeitsregeln

		Eine natürliche Zahl ist teilbar durch …	Beispiele
Endzifferregeln	letzte Ziffer	• **10**, wenn ihre letzte Ziffer **0** ist.	678**0**
		• **5**, wenn ihre letzte Ziffer **0** oder **5** ist.	173**0** oder 278**5**
		• **2**, wenn ihre letzte Ziffer eine gerade Zahl ist.	853**2**, 735**4**, 578**6**, 713**8**, 579**0**
	letzten zwei Ziffern	• **4**, wenn die aus ihren letzten *beiden* Ziffern bestehende Zahl durch **4** teilbar ist.	73**16**, (16 : 4 = 4)
		• **25** (gleiche Regel), denn **4 · 25 = 100**	68**75**, (75 : 25 = 3)
	letzten drei Ziffern	• **8**, wenn die aus ihren letzten *drei* Ziffern bestehende Zahl durch **8** teilbar ist.	5**328**, (328 : 8 = 41)
		• **125** (gleiche Regel), denn **8 · 125 = 1000**	4**625**, (625 : 125 = 5)
Quer summen regeln		• **3**, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.	7482, 7 + 4 + 8 + 2 = 21, 21 : 3 = 7
		• **9**, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.	8523, 8 + 5 + 2 + 3 = 18, 18 : 9 = 2
		• **6**, wenn sie durch **2** und **3** teilbar ist.	191**4**, 1 + 9 + 1 + 4 = 15, 15 : 3 = 5

Bruchrechnung



$\frac{3}{4}$ — Zähler (3), Bruchstrich, Nenner (4)

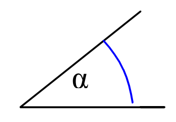
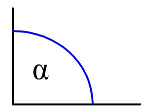
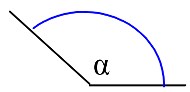
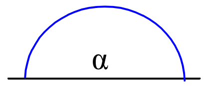
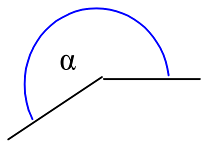
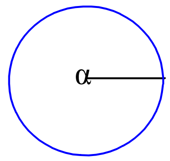
Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird.
Der Zähler gibt die Anzahl dieser Teile an.

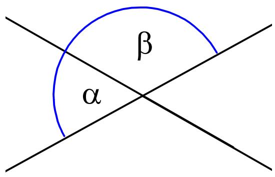
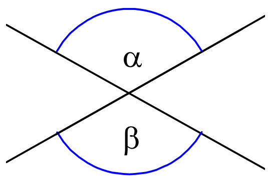
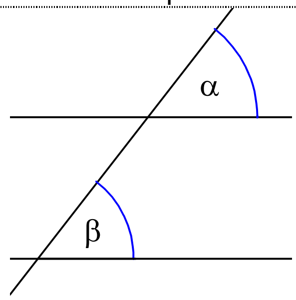
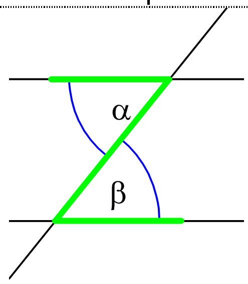
Erweitern	Man erweitert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Beispiel: $\frac{3}{4} \overset{2}{=} \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$
Kürzen	Man kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner durch die gleiche Zahl dividiert. Beispiel: $\frac{15}{24} \underset{3}{=} \frac{15 : 3}{24 : 3} = \frac{5}{8}$
Addition (+) und Subtraktion (-)	Man addiert oder subtrahiert Brüche mit *gleichen Nennern*, indem man nur die Zähler addiert oder subtrahiert. Der Nenner wird beibehalten. Beispiele: $\frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$ $\quad \frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ Brüche mit *verschiedenen Nennern* werden zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann addiert oder subtrahiert. Beispiele: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ $\quad \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$
Bruch mal natürliche Zahl	Man multipliziert einen Bruch mit einer natürlichen Zahl, indem man nur den Zähler mit der natürlichen Zahl multipliziert. Der Nenner bleibt. Beispiel: $\frac{5}{7} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$
Bruch geteilt durch natürliche Zahl	Man dividiert einen Bruch durch eine natürliche Zahl, indem man nur den Nenner mit der natürlichen Zahl multipliziert. Der Zähler bleibt. Beispiel: $\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7 \cdot 4} = \frac{5}{28}$
Multiplikation (•)	Man multipliziert Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert: Beispiel: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 8} = \frac{15}{56}$
Division (:)	Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert. Beispiel: $\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 3} = \frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$
Umrechnen: unechter Bruch gemischte Zahl	$\frac{52}{7} =$ *(52 : 7 = 7 Rest 3)* $= 7\frac{3}{7}$
gemischte Zahl unechter Bruch	$3\frac{5}{7} = \left(\frac{3 \cdot 7 + 5}{7}\right) = \frac{26}{7}$

Rechnen mit Dezimalzahlen

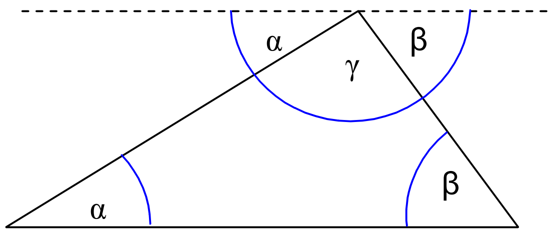
	Regel	Beispiel
Bruch in Dezimalzahl umrechnen	Zähler durch Nenner teilen.	$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$
Addition (**+**) und Subtraktion (**–**)	Die Zahlen müssen stellengerecht untereinander stehen: *Komma unter Komma.* Rechnen wie üblich. Beim Ergebnis steht das Komma wieder an der gleichen Stelle.	3,4 + 4,56 + 13,7 = 3,40 + 4,56 + 13,70 21,66 123,4 – 78,95 – 5,783 = 123,400 – 78,950 – 5,783 38,667
Multiplikation (**·**)	Beim Multiplizieren mit 10, 100, 1000, usw. wird das Komma um die Anzahl der Nullen nach rechts verschoben.	5,346 **·** 100 = 534,6
	Beim Rechnen werden die Kommas nicht beachtet. Beim Ergebnis müssen so viele Stellen hinter dem Komma sein wie bei den Faktoren zusammen	73,4 **·** 13 734 2202 954,2 4,75 **·** 2,5 950 2375 11,875
Division (**:**)	Beim Dividieren durch 10, 100, 1000, usw. wird das Komma um die Anzahl der Nullen nach links verschoben.	7356,4 **:** 1000 = 7,3564
	Wie üblich rechnen. Wenn beim Rechnen das Komma überschritten wird, muss beim Ergebnis das Komma gesetzt werden. Wenn der Divisor ein Komma enthält, muss bei beiden Zahlen das Komma um so viele Stellen nach rechts verschoben werden, dass es beim Divisor wegfallen kann (Erweitern!).	46,8 **:** 12 = 3,9 36 108 108 0 3,962 **:** 1,4 = 39,62 **:** 14 = 2,83 28 116 112 42 42 0

Winkel

Spitzer Winkel	Rechter Winkel	Stumpfer Winkel	Gestreckter Winkel	Überstumpfer Winkel	Vollwinkel
$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$\alpha = 180°$	$180° < \alpha < 360°$	$\alpha = 360°$
					

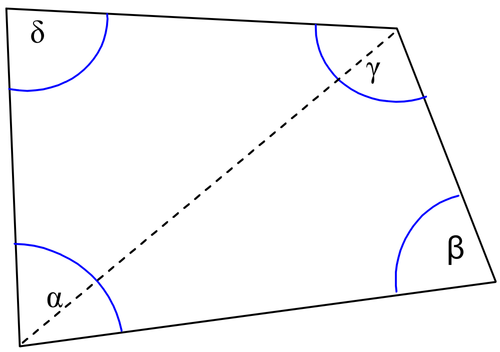
Nebenwinkel	Scheitelwinkel	Stufenwinkel	Wechselwinkel
$\alpha + \beta = 180°$	$\alpha = \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha = \beta$
			

Winkelsummen



Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.

(Die Winkel α und β sind jeweils gleichgroße Wechselwinkel.)

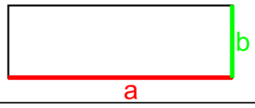
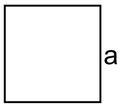


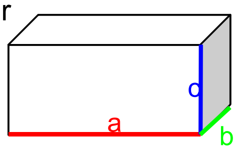
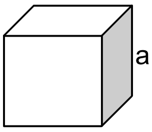
Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.

(Jedes Viereck lässt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit jeweils 180° einteilen.)

Die Winkelsumme in einem Vieleck mit n Ecken beträgt $(n - 2) \cdot 180°$.

Beispiele:	Fünfeck	$(5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$
	Achteck	$(8 - 2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$.

Flächenberechnung	Flächeninhalt	Umfang
Rechteck 	**A = a • b** *Länge mal Breite*	**U = 2 • a + 2 • b** *oder* **U = (a + b) • 2**
Quadrat 	**A = a • a** *wie beim Rechteck*	**U = 4 • a**

Körperberechnung	Volumen	Oberfläche
Quader 	**V = a • b • c** *Länge mal Breite mal Höhe*	**O = 2•a•b + 2•a•c + 2•b•c**
Würfel 	**V = a • a • a** *wie beim Quader*	**O = 6 • a • a**
Ein Quader hat 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Seiten.		

<u>Term</u>

Ein Term ist ein **Rechenausdruck**, der	Beispiele
aus Zahlen,	7
Rechenzeichen,	4 + 5
Klammern und	3 · (8 + 1)
Variablen (Platzhaltern) bestehen kann.	(4x – 3y) · 2

<u>Potenz</u>

2^5 <-- Hochzahl

Grundzahl -->

Eine Potenz besteht aus einer Grundzahl und einer Hochzahl.
Die Hochzahl gibt an, wie oft man die Grundzahl mit sich selbst multiplizieren muss.

Beispiel:
$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Zahlen

Ganze Zahlen (Z)	…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …
Rationale Zahlen (Q)	alle ganzen Zahlen und alle positiven und negativen Bruchzahlen

Rechnen mit rationalen Zahlen

Punktrechnung	Multiplikation •	Division :
gleiche Vorzeichen *(ergeben **plus**)*	**+ mal + = +** +7 • (+8) = +56 **– mal – = +** –2,5 • (–6) = +15	**+ geteilt durch + = +** +4,8 : (+8) = +0,6 **– geteilt durch – = +** –36 : (–0,3) = +120
ungleiche Vorzeichen *(ergeben **minus**)*	**+ mal – = –** +7 • (–8 = –56 **– mal + = –** –5 • (+4,5) = –22,5	**+ geteilt durch – = –** +48 : (–8) = –6 **– geteilt durch + = –** –3,9 : (+3) = –1,3

Strichrechnung			
+ Addition	Gleiche Vorzeichen	Zahlen werden addiert, das Vorzeichen bleibt.	5 + 6 = 11 – 4,2 + (–3,7) = –7,9
	Ungleiche Vorzeichen	Zahlen werden subtrahiert, das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.	7 + (–4) = 3 –7,5 + 3 = – 4,5

Eine Zahl wird **subtrahiert**, indem ihre **Gegenzahl** **addiert** wird.	*kurz*	*ausführlich*
	5 – 3 = 2 5 – (–3) = 5 + 3 = 8 – 5 – 3 = – 8 – 5 – (–3) = – 5 + 3 = – 2	5 – 3 = 5 + (–3) = 5 – 3 = 2 5 – (–3) = 5 + 3 = 8 – 5 – 3 = – 5 + (–3) = – 5 – 3 = – 8 – 5 – (–3) = – 5 + 3 = – 2

Multiplizieren von Klammern			Beispiel
ausmultiplizieren		a·(b + c) = ab + ac	3·(4 + 5) = 12 + 15 = 27
		(a + b)·(c + d) = ac + ad + bc + bd	(3+4) · (5+6) = 15 + 18 + 20 + 24 = 77
Binomische Formeln	1	**$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$**	$(100+7)^2$ =10000 +1400 + 49 = 11449
	2	**$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$**	$(100-6)^2$ = 10000 – 1200 + 36 = 8836
	3	**$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$**	(90+7) ·(90–7) = 8100 – 49 = 8051

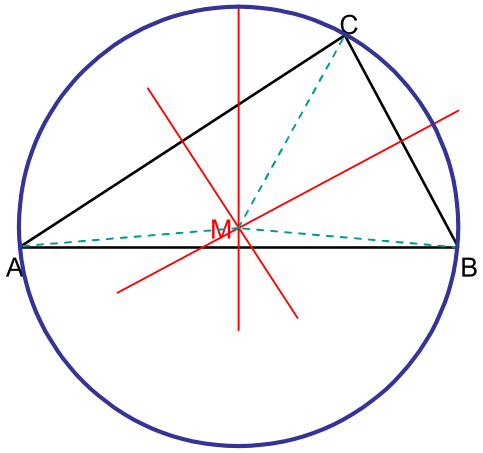
Terme und Gleichungen

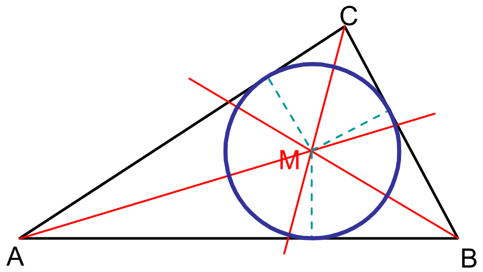
Terme vereinfachen		Beispiel
Es können nur Einzelterme mit gleichen Variablen *(Platzhalter, meistens Buchstaben)* zusammengefasst *(addiert oder subtrahiert)* werden.		$6a + 5b$ *(kann nicht zusammengefasst werden)*
		$7a + 16b + 2a – 5b = 9a + 11b$
Einzelterme können nur dann zusammengefasst werden, wenn die Variablen gleiche Hochzahlen haben.		$2a^2 + 4a + 5 + 3b$ *(kann nicht zusammengefasst werden)*
		$6a^2 + 3b + 2ab – 7b – 2a^2 = 4a^2 + 2ab – 4b$
Klammern auflösen	Pluszeichen vor der Klammer lässt die Zeichen in der Klammer unverändert.	$17a + (–7b + 3a – 5b) = 17a – 7b + 3a – 5b$ $= 20a – 12b$
	Minuszeichen vor der Klammer **ändert** alle Zeichen in der Klammer.	$17a – (–7b + 3a – 5b) = 17a + 7b – 3a + 5b$ $= 14a + 12b$

Gleichungen lösen	Beispiel
Die Gleichung wird so umgeformt, dass die Lösung leicht abgelesen werden kann, z.B.: **x = 4** Gleichungen werden vereinfacht, indem • auf beiden Seiten dasselbe addiert oder subtrahiert wird, • beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert werden.	Umformung $4x – 7 = 25$ | + 7 $4x = 32$ | : 4 $x = 8$
	$2x – 7 + 4x – 3 = 14$ *ordnen* $2x + 4x – 7 – 3 = 14$ *zusammenfassen* $6x – 10 = 14$ | + 10 $6x = 24$ | : 6 $x = 4$
Beide Seiten erst ordnen und zusammenfassen. Dann nach x umformen.	$18 – 4x + 3 – 7x = 8 + 5x – 11 – 8x$ $18 + 3 – 4x – 7x = 8 – 11 + 5x – 8x$ $21 – 11x = – 3 – 3x$ | – 21 $– 11x = – 24 – 3x$ | + 3x $– 8x = – 24$ | : (– 8) $x = 3$
Erst ausmultiplizieren. Dann nach x umformen.	$3 (2x – 6) = – 4 (x + 17)$ $6x – 18 = – 4x – 68$ | + 4x $10x – 18 = – 68$ | + 18 $10x = – 50$ | : 10 $x = – 5$

Linien im Dreieck

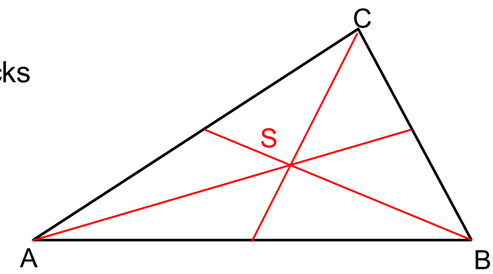
Die drei **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Das ist der Mittelpunkt des **Umkreises**.

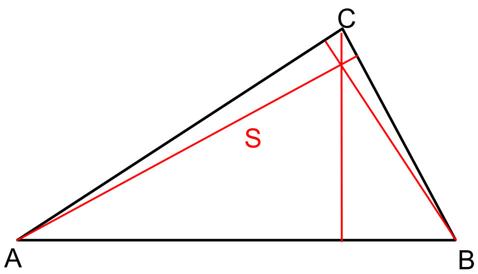




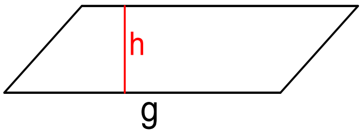
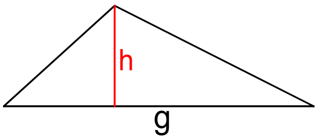
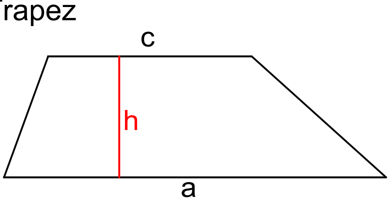
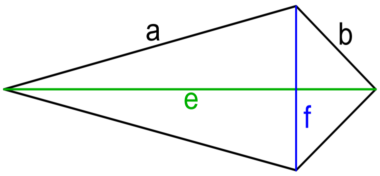
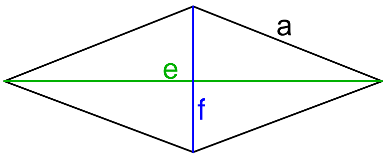
Die drei **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Das ist der Mittelpunkt des **Inkreises**.

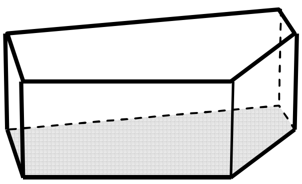
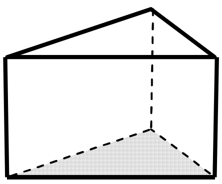
Die drei **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Das ist der **Schwerpunkt**.





Die drei **Höhen** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Flächenberechnung	Flächeninhalt	Umfang
Parallelogramm 	$\mathbf{A = g \cdot h}$ *Grundseite mal Höhe*	$\mathbf{U = 2 \cdot a + 2 \cdot b}$ *oder* $\mathbf{U = (a + b) \cdot 2}$
Dreieck 	$\mathbf{A = \frac{g \cdot h}{2}}$	$\mathbf{U = a + b + c}$
Trapez 	$\mathbf{A = \frac{a + c}{2} \cdot h}$ *Summe der parallelen Seiten mal Höhe :2*	$\mathbf{U = a + b + c + d}$
Drachen 	$\mathbf{A = \frac{e \cdot f}{2}}$ *1. Diagonale mal 2. Diagonale :2*	$\mathbf{U = 2 \cdot a + 2 \cdot b}$ *oder* $\mathbf{U = (a + b) \cdot 2}$
Raute 	$\mathbf{A = \frac{e \cdot f}{2}}$	$\mathbf{U = 4 \cdot a}$

Körperberechnung	Volumen	Oberfläche
Prisma 	$\mathbf{V = G \cdot H}$ *Grundfläche mal Höhe*	(Mantel) $\mathbf{M = u \cdot H}$ *Umfang mal Körperhöhe* $\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$ *2•Grundfläche plus Mantel*
Dreiecksäule 	$\mathbf{V = G \cdot H}$ (**H** *Körperhöhe)* *oder* $\mathbf{V = \frac{g \cdot h}{2} \cdot H}$ *(g ist die Grundseite und h die Höhe der Grundfläche)*	(Mantel) $\mathbf{M = u \cdot H}$ $\mathbf{O = g \cdot h + M}$

Zuordnungen

Eine Zuordnung ist **proportional**, wenn zum Vielfachen einer Größe das entsprechende Vielfache der zugeordneten Größe gehört.
(Je mehr – desto mehr)

	kg	Preis (€)	
	2	4,60	
·3			·3
	6	6,90	

Eine Zuordnung ist **antiproportional**, wenn zum Vielfachen einer Größe der entsprechende Teil der zugeordneten Größe gehört.
(Je mehr – desto weniger)

	Arbeiter	Tage	
	3	4	
·2			:2
	6	2	

Beim **Dreisatz** schließt man zunächst auf die Einheit und anschließend auf das gesuchte Vielfache.

Proportionale Zuordnung:

3 kg Fleisch kosten 33,60 €.
Wie viel kosten 4 kg?

4 kg kosten 44,80 €.

	kg	Preis (€)	
	3	33,60	
:3			:3
	1	11,20	
·4			·4
	4	44,80	

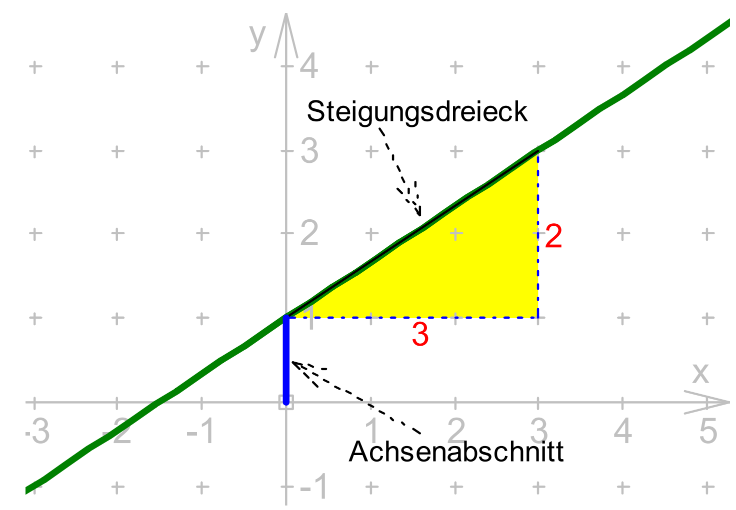
Antiproportionale Zuordnung:

Der Futtervorrat reicht für 8 Tiere 30 Tage.
Wie lange reicht er für 5 Tiere?

Der Futtervorrat reicht für 5 Tiere 48 Tage.

	Tiere	Tage	
	8	30	
:8			·8
	1	240	
·5			:5
	5	48	

Lineare Funktionen



y = m • x + b

m = Steigung
b = Achsenabschnitt

Beispiel: $m = \frac{2}{3}$ und $b = 1$

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

Prozentrechnung

G = Grundwert, **p** = Prozentsatz, **W** = Prozentwert

Grundformel: $W = G \cdot \frac{p}{100}$

Aufgabentyp	Dreisatz	Prozentfaktor
Prozentwert **W** berechnen: Wie viel sind 4 % von 350 € ? G = 350 € p = 4 % = 0,04	100 % = 350 € :100 1 % = 3,50 € ·4 4 % = 14 €	350 € · 0,04 = 14 €
Prozentsatz **p** berechnen: Wie viel Prozent sind 36 € von 400 € ? W = 36 € G = 400 €	400 € = 100 % :100 4 € = 1 % ·9 36 € = 9 %	36 : 400 = 0,09 = 9 %
Grundwert **G** berechnen: Von wie viel € sind 56 € genau 7 Prozent ? W = 56 € p = 7 %	7 % = 56 € :7 1 % = 8 € ·100 100 % = 800 €	56 € : 0,07 = 800 €

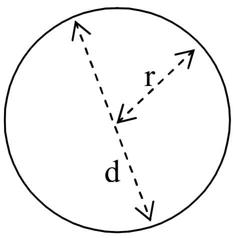
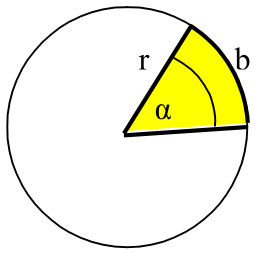
Vermehrten Grundwert berechnen: Der Preis von 250 € wird um 8 % erhöht. G = 250 €, p = 8 % *(Prozentfaktor 1,08)* *Rechnung* 250 € · 1,08 = 270 €	Verminderten Grundwert berechnen: Der Preis von 250 € wird um 8 % gesenkt. G = 250 €, p = 8 % *(Prozentfaktor 0,92)* *Rechnung* 250 € · 0,92 = 230 €

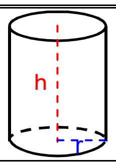
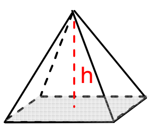
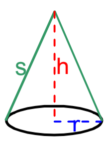
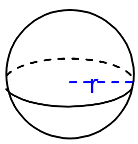
Zinsrechnung **K** = Kapital, **p** = Zinssatz, **Z** = Zinsen, **t** = Tage	Jahreszinsen: $Z = K \cdot \frac{p}{100}$
Aufgabentyp	Rechnung mit Prozentfaktor
Zinsen **Z** berechnen: Wie viel Zinsen bringen 2500 € zu 3,5 % im Jahr ? K = 2500 €, p = 3,5 % *(Prozentfaktor 0,035)*	2500 € · 0,035 = 87,50 €
Zinssatz **p** berechnen: 1800 € haben in einem Jahr 45 € Zinsen gebracht. K = 1800 €, Z = 45 €	45 : 1800 = 0,025 also p = 2,5 %
Kapital **K** berechnen: Welches Kapital hat in einem Jahr bei einem Zinssatz von 5,5 % genau 660 € Zinsen gebracht? p = 5,5 %, Z = 660 € *(Prozentfaktor 0,055)*	660 € : 0,055 = 12000 €
	Tageszinsen: $Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}$
Zinsen **Z** berechnen: Wie viel Zinsen bringen 2500 € zu 3,5 % in 45 Tagen ? K = 2500 €, p = 3,5 % und t = 45	2500 · 0,035 · 45 : 360 = 10,9375 also Z = 10,94 €
Zinssatz **p** berechnen: 2000 € haben in 75 Tagen 18,75 € Zinsen gebracht. K = 2000 €, Z = 18,75 € und t = 75	18,75 : 2000 : 75 · 360 = 0,045 also p = 4,5 %
Kapital **K** berechnen: Welches Kapital hat in 150 Tagen bei einem Zinssatz von 5,5 % genau 206,25 € Zinsen gebracht? p = 5,5 %, Z = 206,25 € und t = 150	206,25 : 0,055 : 150 · 360 = 9000 also K = 9000 €
Anzahl der Tage t berechnen: In wie vielen Tagen bringen 6000 € zu 4,5 % verzinst 90 € Zinsen ? K = 6000 €, p = 4,5 % und Z = 90€	90 : 6000 : 0,045 · 360 = 120 also t = 120 Tage

9/10

Zahlen

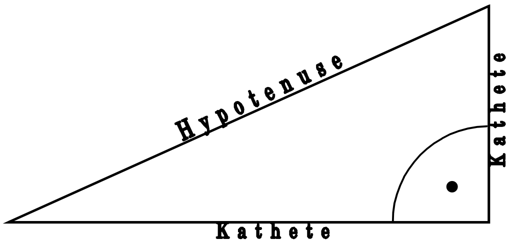
Kreiszahl π	3,14…. (unendliche und unregelmäßige Ziffernfolge)
Reelle Zahlen (R)	alle Zahlen, die sich als endliche oder unendliche Kommazahlen darstellen lassen (alle rationalen Zahlen, alle Wurzelzahlen, π, …)
Kubikzahlen bis 10^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000
Standardschreibweise	Sehr große Zahlen gibt man oft so an. $25\,280\,000 = 2{,}528 \cdot 10^7$

Flächenberechnung	Flächeninhalt	Umfang
Kreis  	$\mathbf{A = \pi \cdot r^2}$	$\mathbf{U = 2 \cdot \pi \cdot r}$ oder $\mathbf{U = \pi \cdot d}$
Kreisausschnitt  	$\mathbf{A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2}$	b = Bogenlänge $\mathbf{b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$

Körperberechnung	Volumen	Oberfläche
Zylinder  	$\mathbf{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$ *Grundfläche • Körperhöhe*	(Mantel) $\mathbf{M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$ *Umfang • Körperhöhe* $\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$
Pyramide  	$\mathbf{V = \frac{G \cdot h}{3}}$ *(G = Grundfläche h = Körperhöhe)*	$\mathbf{O = G + M}$ (Mantel besteht aus Dreiecken)
Kegel  	$\mathbf{V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$	$\mathbf{M = \pi \cdot r \cdot s}$ (s = Mantellinie) $\mathbf{O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s}$
Kugel  	$\mathbf{V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}$	$\mathbf{O = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$

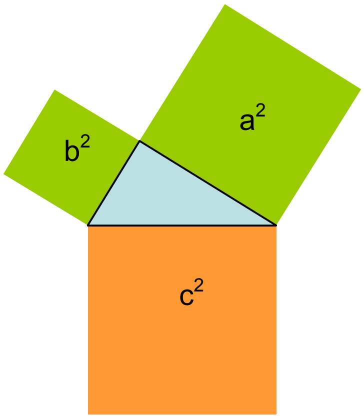
Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

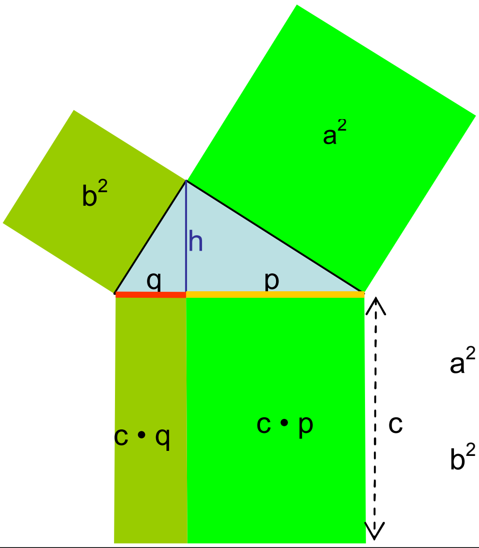
In einem rechtwinkligen Dreieck bilden die Katheten den rechten Winkel. Die Hypotenuse ist die längste Seite und liegt dem rechten Winkel gegenüber.



In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Kathetenquadrate zusammen denselben Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat.

Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$





$a^2 = c \cdot p$

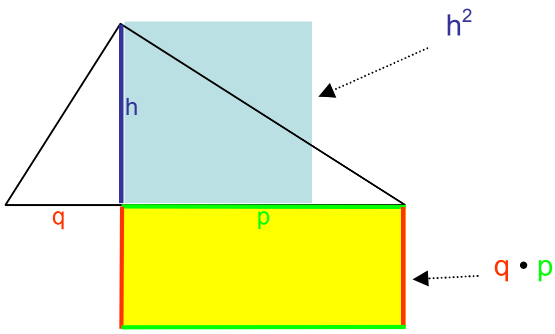
$b^2 = c \cdot q$

In einem rechtwinkligen Dreieck hat jedes Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem benachbarten Hypotenusenabschnitt.

Kathetensatz (Euklid)

In einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Höhensatz (Euklid) $h^2 = q \cdot p$

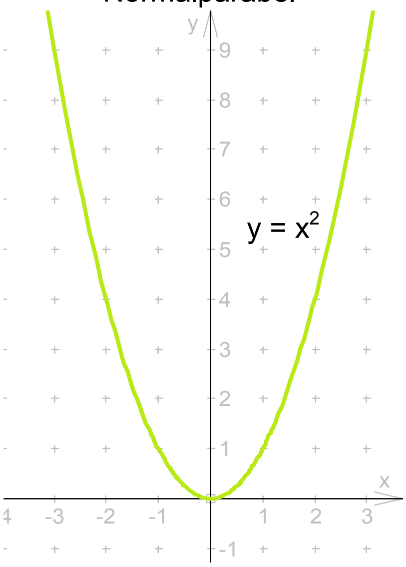


Quadratische Gleichungen

	Beispiel
Durch Umformen erhält man eine Gleichung der Art: **$ax^2 = b$** → *(rein quadratisch)* *In der Gleichung kommt nur x^2 und eine Zahl vor.*	$5x^2 - 17 = 3x^2 + 33$ | $- 3x^2$ $2x^2 - 17 = 33$ | $+ 17$ $2x^2 = 50$ | $: 2$ $x^2 = 25$ | √ $x_1 = 5$ $x_2 = -5$
Durch Umformen erhält man eine Gleichung der Art: **$ax^2 + bx = 0$** → *In der Gleichung kommen nur x^2 und x vor, die Zahlen ergeben zusammengefasst 0.*	$5 + 3x^2 + 2x - 4 = 1 - 7x$ | *zusammenfassen* $3x^2 + 2x + 1 = 1 - 7x$ | $- 1$ $3x^2 + 2x = -7x$ | $+7x$ $3x^2 + 9x = 0$ | *ausklammern* $x \cdot (3x + 9) = 0$ | *Produkt = 0, wenn ein Faktor 0 ist* $x_1 = 0$ | *2. Lösung: (3x + 9) = 0* $3x + 9 = 0$ | $- 9$ $3x = -9$ | $: 3$ $x_2 = -3$
In der Gleichung kommen x^2, x und Zahlen vor. Durch Umformen wird sie auf die Normalform gebracht: **$x^2 + px + q = 0$** → *und dann mit der Formel* $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ *gelöst.* *Im Beispiel* p = 6 *und* q = 8	$5x^2 + 8x - 4 = 3x^2 - 4x - 20$ | $- 3x^2$ $2x^2 + 8x - 4 = -4x - 20$ | $+ 4x$ $2x^2 + 12x - 4 = -20$ | $+ 20$ $2x^2 + 12x + 16 = 0$ | $: 2$ $x^2 + 6x + 8 = 0$ | *Lösungsformel* $x = -3 + \sqrt{9 - 8}$ | *Wurzel ausrechnen* $x = -3 + \sqrt{1}$ | √ $x = -3 + 1$ $x_1 = -2$ $x_2 = -3 - 1$ $x_2 = -4$
oder *mit quadratischer Ergänzung:* $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, *hier* p = 6 → *also* $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$	$5x^2 + 8x - 4 = 3x^2 - 4x - 20$ | $- 3x^2$ $2x^2 + 8x - 4 = -4x - 20$ | $+ 4x$ $2x^2 + 12x - 4 = -20$ | $+ 4$ $2x^2 + 12x = -16$ | $: 2$ $x^2 + 6x = -8$ | $+ 9$ *(quadratische Ergänzung)* $x^2 + 6x + 9 = 1$ | *erste binomische Formel rückw.* $(x + 3)^2 = 1$ | √ $(x + 3) = 1$ | $- 3$ $x_1 = -2$ $(x + 3) = -1$ | $- 3$ $x_2 = -4$

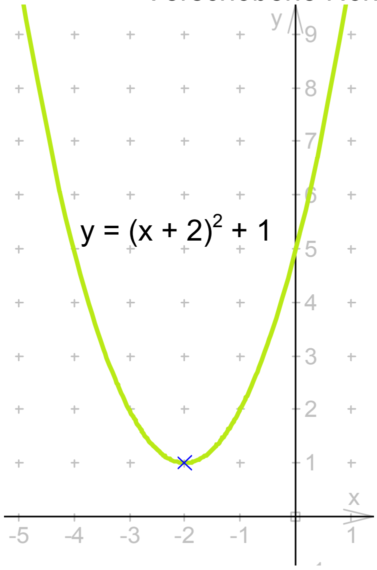
<u>Quadratische Funktionen</u>

Normalparabel

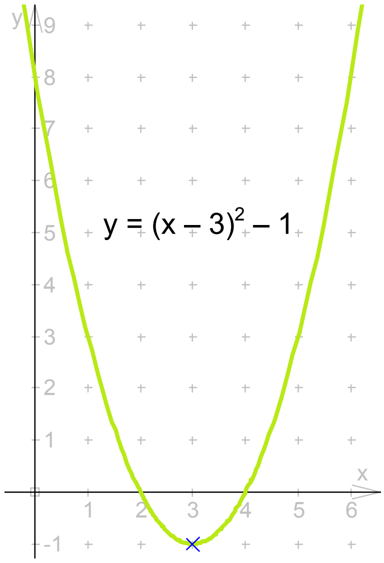


Scheitelpunkt bei (0 | 0)

Verschobene Normalparabeln



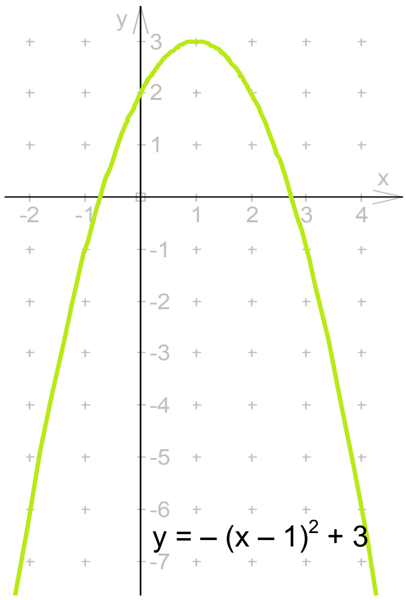
Scheitelpunkt bei (–2 | 1)



Scheitelpunkt bei (3 | –1)

Scheitelpunktform	$y = (x + 2)^2 + 1$	$y = (x - 3)^2 - 1$
(*Umrechnen mit binomischen Formeln)*	$y = x^2 + 4x + 4 + 1$	$y = x^2 - 6x + 9 - 1$
Normalform	$y = x^2 + 4x + 5$	$y = x^2 - 6x + 8$

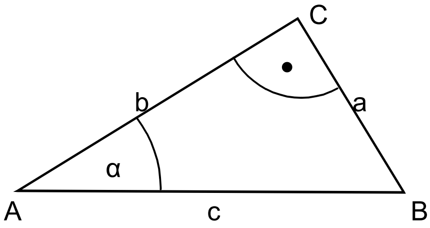
Steht vor dem x^2 ein Minuszeichen, so ist die Parabel nach unten geöffnet.	
Normalform	$y = -x^2 + 2x + 2$
Umrechnen	$y = -x^2 + 2x - 1 + 3$ $y = -(x^2 - 2x + 1) + 3$
Scheitelpunktform	$y = -(x - 1)^2 + 3$



Scheitelpunkt bei (1 | 3)

Trigonometrie

Winkelfunktionen im **rechtwinkligen** Dreieck

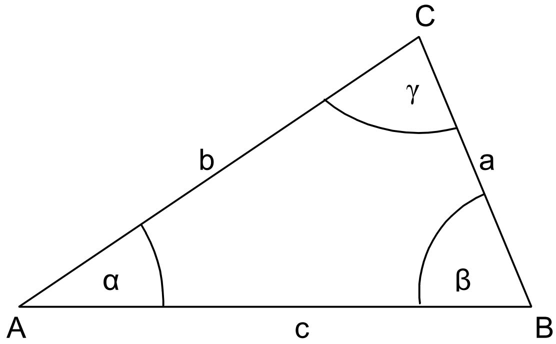


$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Für jedes **beliebige** Dreieck gelten der Sinussatz und der Kosinussatz.



Sinussatz: In *jedem* Dreieck verhalten sich die Seitenlängen zueinander wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ $\quad a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ $\quad b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

oder $$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin\alpha}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin\beta}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin\gamma}}$$

Kosinussatz:

$$\underbrace{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}}_{\text{(wie Satz des Pythagoras)}} \mathbf{- 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$

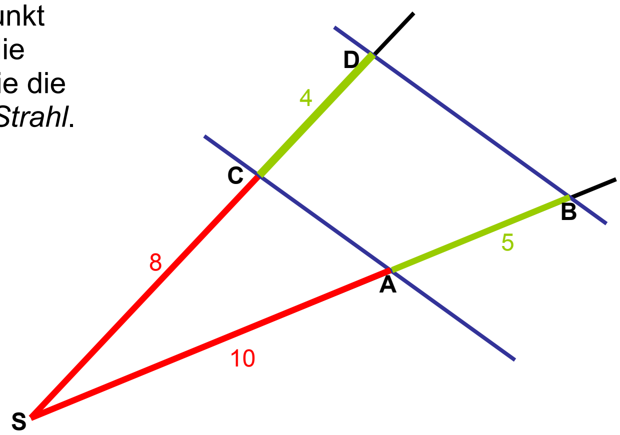
oder $$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta}$$

oder $$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

Strahlensätze

1. Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die *Abschnitte auf dem einen Strahl* zueinander wie die entsprechenden *Abschnitte auf dem anderen Strahl*.



$\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}$

10 : 5 = 8 : 4

oder $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD}$

10 : 15 = 8 : 12

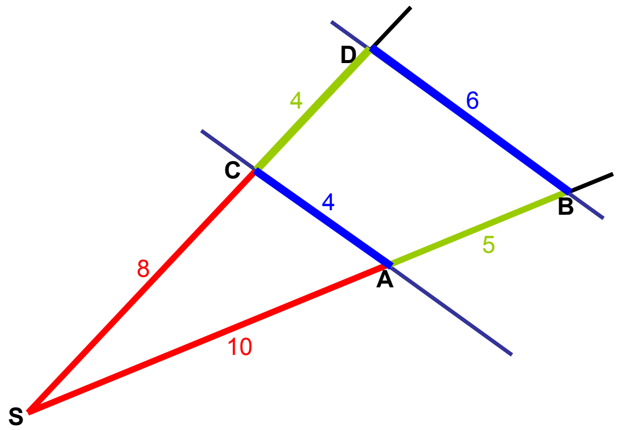
oder $\overline{SB} : \overline{AB} = \overline{SD} : \overline{CD}$

15 : 5 = 12 : 4

….

2. Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die *Parallelenabschnitte* zueinander wie die entsprechenden *Strahlenabschnitte vom Scheitelpunkt* aus gemessen.



$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{SA} : \overline{SB}$

4 : 6 = 10 : 15

oder $\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{SC} : \overline{SD}$

4 : 6 = 8 : 12

oder $\overline{SA} : \overline{AC} = \overline{SB} : \overline{BD}$

10 : 4 = 15 : 6

oder $\overline{SC} : \overline{CA} = \overline{SD} : \overline{DB}$

8 : 4 = 12 : 6

Potenzen

Potenz

2^5 ← Exponent

Basis

Beispiel:
$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Potenzgesetze		Beispiel
gleiche Basis	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^5 : 2^2 = 2^3 = 8$
gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^4 \cdot 3^4 = 6^4 = 1296$
	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$6^4 : 3^4 = 2^4 = 16$
Potenzieren	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^2)^3 = 2^6 = 64$
negativer Exponent	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
Sonderfall	$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
Bruch als Exponent	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Wurzeln

Wurzel

Wurzelexponent

$\sqrt[n]{a}$ ← Radikand

	Beispiel
$\sqrt{a}$ ist die positive Zahl x, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. $x^2 = a$	$\sqrt{25} = 5$, denn $5 \cdot 5 = 25$
$\sqrt[3]{a}$ ist die positive Zahl x, die dreimal mit sich selbst multipliziert a ergibt. $x^3 = a$	$\sqrt[3]{27} = 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$\sqrt[n]{a}$ ist die positive Zahl x, die n-mal mit sich selbst multipliziert a ergibt. $x^n = a$	$\sqrt[5]{32} = 2$, denn $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

Exponentielles Wachstum

Grundformel: $G_n = G_0 \cdot q^n$ oder $G_n = G_0 \cdot (1 \pm \frac{p}{100})^n$

	Zunahme	Abnahme
G_0 = Anfangsgröße	200000 Einwohner	90°C
n = Anzahl der Schritte	10 Jahre	3 h
G_n = Größe nach n Schritten	Gesucht (siehe Rechnung)	Gesucht (siehe Rechnung)
p = prozentuale Zunahme / Abnahme	4 % jährlich	9 % stündlich
q = Wachstumsfaktor $(1+\frac{p}{100})$ *oder* Abnahmefaktor $(1-\frac{p}{100})$	1,04	0,91
Rechnung	$200000 \cdot 1{,}04^{10} = 296048{,}8$ ≈ <u>300000 Einwohner</u>	$90 \cdot 0{,}91^3 = 67{,}8$ ≈ <u>68°C</u>

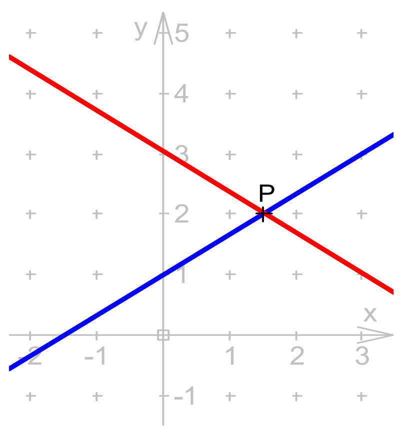
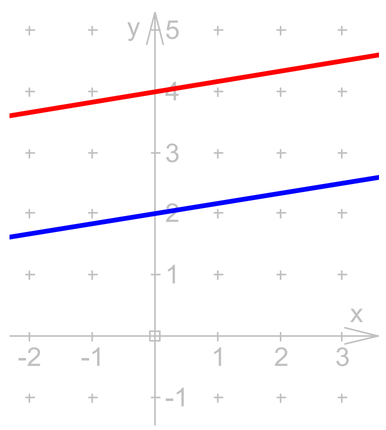
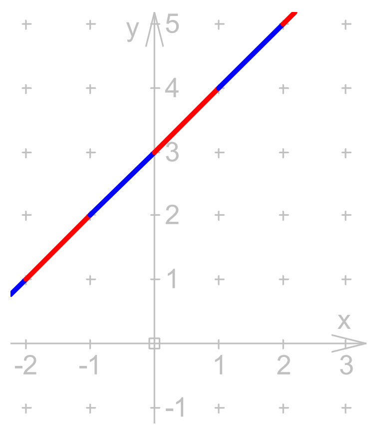
Zinseszinsrechnung

Grundformel: $K_n = K_0 \cdot q^n$ oder $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

	Beispiel	Rechnung
K_0 = Anfangskapital	15000 €	$15000 \cdot 1{,}03^{10} = 20158{,}745$ ≈ <u>20159 €</u>
n = Anzahl der Jahre	10	
K_n = Kapital nach n Jahren	Gesucht (siehe Rechnung)	
p = Prozentsatz	3 % jährlich	
q = Wachstumsfaktor $(1+\frac{p}{100})$	1,03	

Lineare Gleichungssysteme

Jede lineare Gleichung mit **zwei** Variablen (meistens x und y) lässt sich als Gerade im Koordinatensystem darstellen. Bei zwei Geraden geht es darum, wo der Schnittpunkt liegt. Hierbei gibt es drei Lösungsmöglichkeiten:

Die Geraden schneiden sich in einem Punkt. Rechnung ergibt z.B.:	Die Geraden schneiden sich nicht. Sie sind parallel zueinander. Rechnung ergibt z.B.:	Die Geraden sind identisch (gleich). Rechnung ergibt z.B.:
$x = 1{,}5$ oder $y = 2$	$4 = 2$	$3 = 3$
		

Bei der rechnerischen Lösung gibt es drei Lösungsverfahren:

Gleichsetzungsverfahren

I $\quad 2x + 3y = 4 \quad | \cdot 2$
II $\quad \underline{-2x + 2y = -3} \quad | \cdot 3$

Ia $\quad 4x + 6y = 8 \quad | -4x$
IIa $\quad \underline{-6x + 6y = -9} \quad | +6x$

Ib $\quad 6y = 8 - 4x$
IIb $\quad \underline{6y = -9 + 6x}$

Ib = IIb:
$8 - 4x = -9 + 6x \quad | -6x$
$8 - 10x = -9 \quad | -8$
$-10x = -17 \quad | :(-10)$
$x = 1{,}7$

x in I:
$2 \cdot 1{,}7 + 3y = 4$
$3{,}4 + 3y = 4 \quad | -3{,}4$
$3y = 0{,}6 \quad | :3$
$y = 0{,}2$

Lösung: (1,7 | 0,2)

Einsetzungsverfahren

I $\quad 2x - 4y = 6 \quad | +4y$
II $\quad \underline{3x + 2y = 5}$

Ia $\quad 2x = 6 + 4y \quad | :2$
II $\quad \underline{3x + 2y = 5}$

Ib $\quad x = 3 + 2y$
II $\quad \underline{3x + 2y = 5}$

Ib in II:
$3 \cdot (3 + 2y) + 2y = 5$
$9 + 6y + 2y = 5$
$9 + 8y = 5 \quad | -9$
$8y = -4 \quad | :8$
$y = -0{,}5$

y in II:
$3x + 2 \cdot (-0{,}5) = 5$
$3x - 1 = 5 \quad | +1$
$3x = 6 \quad | :3$
$x = 2$

Lösung: (2 | –0,5)

Additions- oder Subtraktionsverfahren

I $\quad 4x - 3y = 2 \quad | \cdot 3$
II $\quad \underline{-6x + 5y = 3} \quad | \cdot 2$

Ia $\quad 12x - 9y = 6$
IIa $\quad -12x + 10y = 6$

Ia + IIa:
$-9y + 10y = 12$
$y = 12$

y in I:
$4x - 3 \cdot 12 = 2$
$4x - 36 = 2 \quad | +36$
$4x = 38 \quad | :4$
$x = 9{,}5$

Lösung: (9,5 | 12)

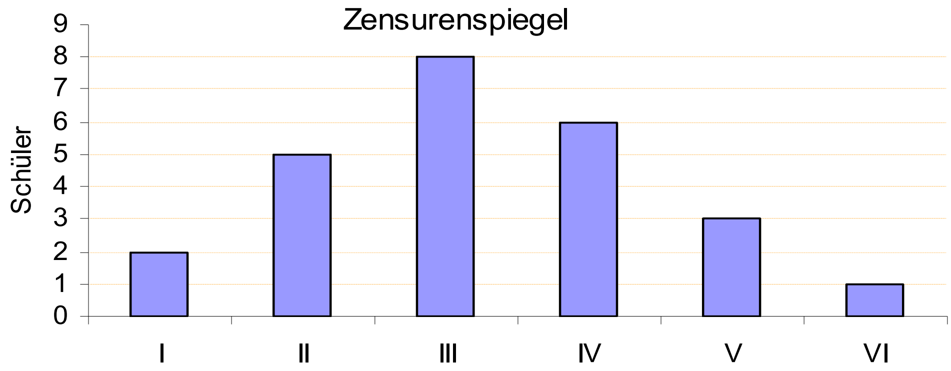
Tabellen und Diagramme

Tabelle

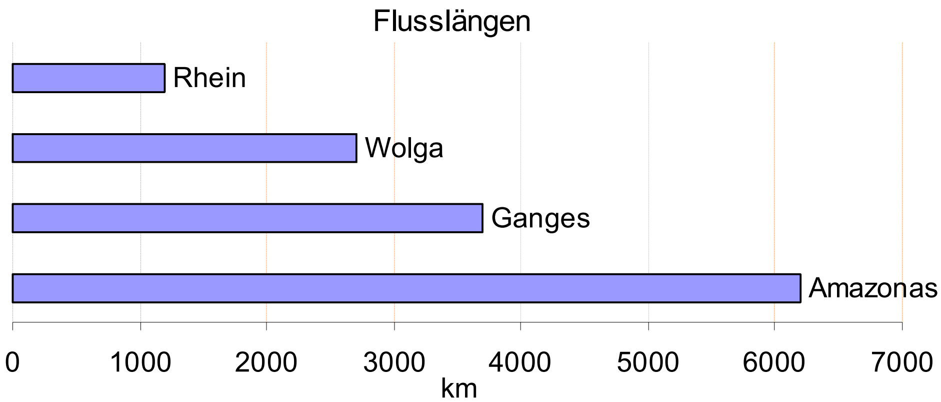
Zensurenspiegel

I	II	III	IV	V	VI
2	5	8	6	3	1

Säulendiagramm



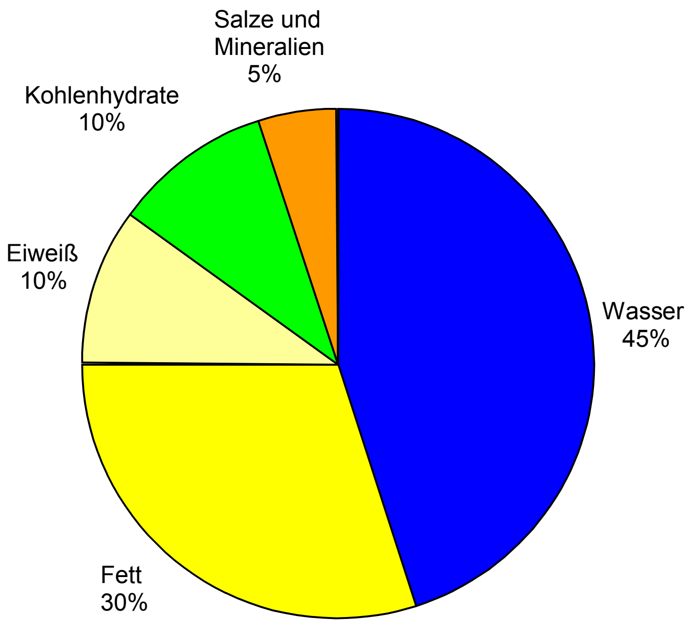
Balkendiagramm



Kreisdiagramm

Bestandteile	%	Winkel in °
Wasser	45	162
Fett	30	108
Eiweiß	10	36
Kohlenhydrate	10	36
Salze und Mineralien	5	18

Die Winkel werden mit Hilfe des Dreisatzes berechnet (1 % = 3,6°).



Begriffe

Beispiel Punktzahlen in einer Mathearbeit mit 24 Schülern (Höchstpunktzahl 30):

9, 24, 18, 10, 12, 14, 18, 15, 3, 18, 18, 15, 15, 18, 19, 18, 29, 20, 10, 15, 19, 16, 13, 18

Das **Minimum** ist der kleinste Wert.	**3**
Das **Maximum** ist der größte Wert.	**29**
Die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum heißt **Spannweite**.	**29** – **3** = **26**
Zählt man alle Werte zusammen und teilt sie durch ihre Anzahl, erhält man den **Mittelwert** (Durchschnitt).	Summe aller Werte: 384 Anzahl: 24 Mittelwert: 384 **:** 24 = **16**
Der **Modus** oder **Modalwert** ist der Wert, der am häufigsten vorkommt.	**18**

Geordnete Reihenfolge:

3, 9, 10, 10, 12, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 24, 29

Hat man die Werte geordnet, dann steht genau in der Mitte der **Zentralwert** (Median).
Stehen dort zwei Werte, dann ist es der Mittelwert dieser zwei. Hier: (16 + 18) **:** 2 = 34 **:** 2 = **17**

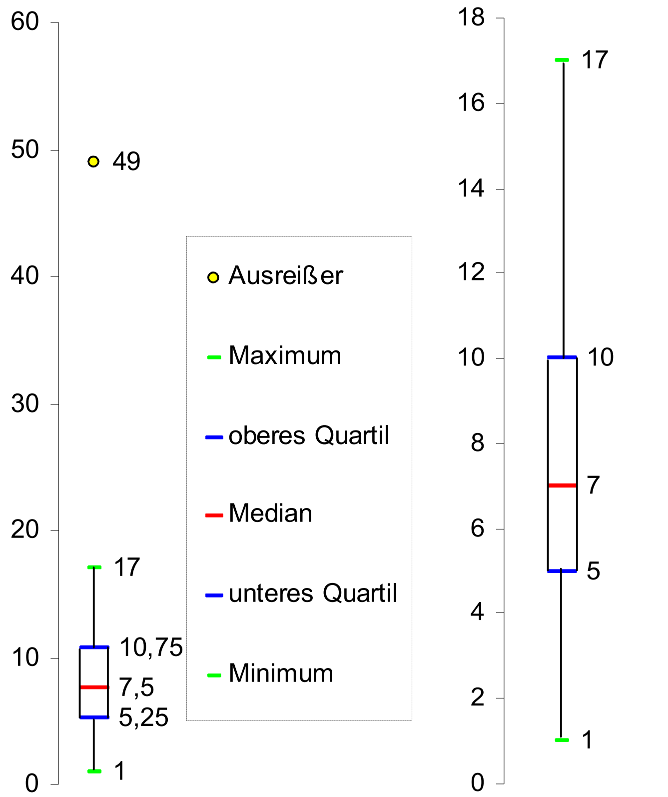
Boxplot

Beispiel 30 Schüler haben ein Diktat geschrieben mit folgenden Fehlerzahlen:
3, 17, 5, 6, 8, 12, 1, 7, 9, 15, 8, 2, 6, 10, 4, 7, 9, 6, 14, 49, 8, 11, 6, 9, 12, 4, 7, 3, 4, 12

Geordnete Reihenfolge: (Mitte) (Ausreißer)
1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, **7**, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 12, 12, 12, 14, 15, 17, 49

Minimum – kleinster Wert (ohne Ausreißer)	1
Maximum – größter Wert (ohne Ausreißer)	17
Spannweite – Differenz zwischen Minimum und Maximum	16
Mittelwert – Durchschnittswert	7,7
Häufigster Wert (*Modus oder Modalwert)*	6
Zentralwert (*Median)* – Wert in der Mitte der geordneten Reihenfolge; bei einer geraden Anzahl von Daten das Mittel der beiden mittleren Werte	**7**
Unteres Quartil – Zentralwert nur von der unteren Hälfte	5
Oberes Quartil – Zentralwert nur von der oberen Hälfte	10
Ausreißer – deutlich weit entfernt vom Maximum oder auch vom Minimum	49

Einige dieser Daten werden in einem **Boxplot** graphisch dargestellt:



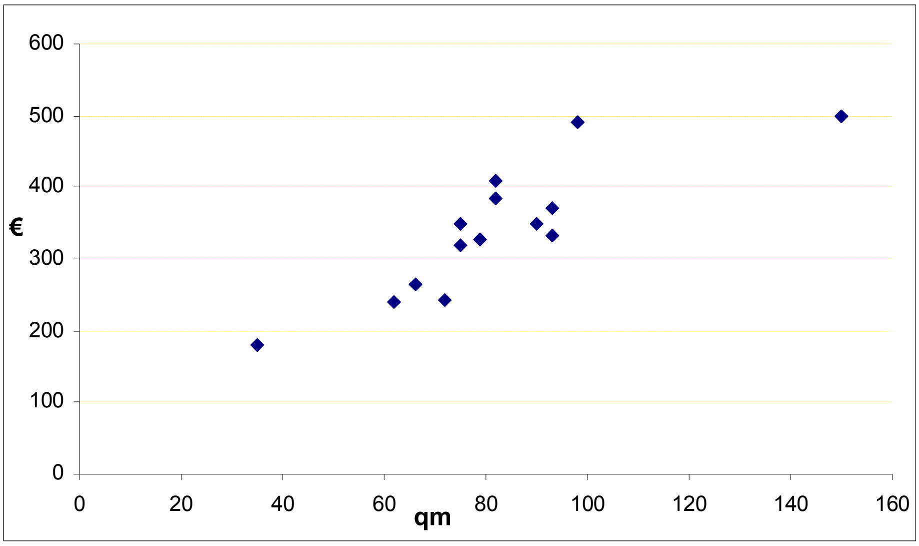
mit Ausreißer ohne Ausreißer

Streudiagramm

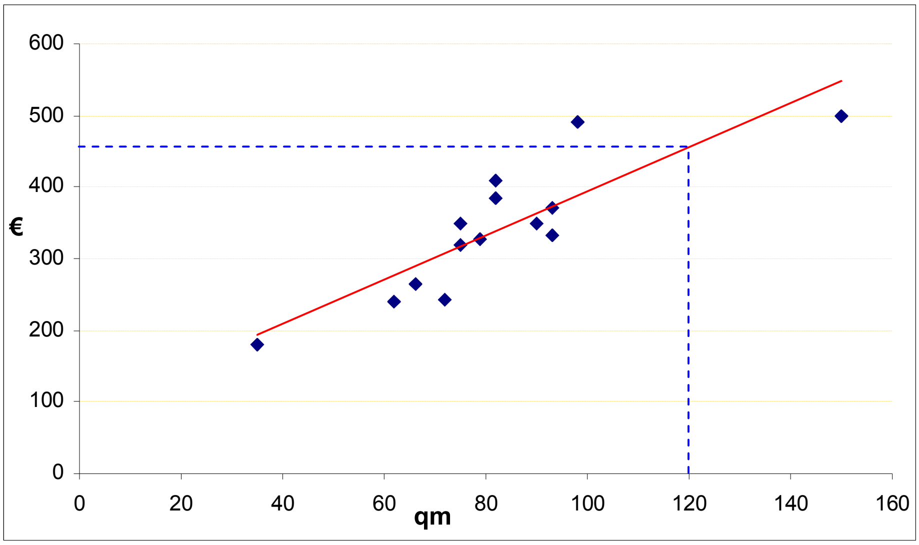
Beispiel Wohnungsmietpreise im Raum Hameln

qm	79	75	98	62	150	66	75	82	93	35	82	93	72	90
€	328	350	490	240	500	265	320	410	372	180	385	334	244	350

Wenn Daten in Zahlenpaaren auftreten, kann man sie in einem zweidimensionalen **Streudiagramm** darstellen. Dazu werden die Zahlenpaare als Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen.



Wenn ein linearer Zusammenhang zwischen den Daten besteht, kann man eine **Ausgleichsgerade** zeichnen. Das ist die Gerade, die den kleinsten Abstand zu allen Punkten hat. Sie ermöglicht das Ablesen von Schätzwerten zwischen den Messpunkten.
Hier z.B.: Die Miete für eine Wohnung mit 120 qm beträgt ungefähr 460 €.



Häufigkeiten

Beispiel Korbwurf: Jan trifft bei 10 Würfen 5-mal,
Uwe trifft bei 9 von 12 Würfen und
Peter hat bei 15 Würfen 6 Treffer.

Die **absolute Häufigkeit** ist die Anzahl, mit der bestimmte Ereignisse eintreten.	Jan 5 Treffer Uwe 9 Treffer Peter 6 Treffer
Die **relative Häufigkeit** ist ein Anteil: $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$	siehe Tabelle unten

	Würfe	Treffer	Relative Häufigkeit	
Jan	10	5	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	50%
Uwe	12	9	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	75%
Peter	15	6	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	40%